

Objetivos para Este Capítulo

1. Definir as funções trigonométricas inversas
2. Plotar as funções trigonométricas inversas
3. Determinar estas propriedades das funções trigonométricas inversas: domínio, imagem, zeros, períodos e propriedades simétricas
4. Resolver indetidades trigonométricas envolvendo as seis funções trigonométricas

Comandos do Maple Usados Neste Capítulo

<code>Simplify</code>	Encontra a forma mais simples de uma expressão algébrica ou trigonométrica.
<code>sec(x), csc(x), cot(x)</code>	Nomes para as funções trigonométricas inversas do Maple
<code>evalf(expr)</code>	Converte <code>expr</code> para um número decimal.
<code>plot (expr, discontinuity=true)</code>	Plota uma curva com uma descontinuidade (elimina a linha vertical).
<code>plot(expr, title=`Título do Gráfico`)</code>	Dá ao gráfico um título, neste caso, “Título do Gráfico”.
<code>Rhs</code>	Seleciona o lado direito da equação
<code>Lhs</code>	Seleciona o lado esquerdo da equação

Definição das Funções Trigonométricas Inversas

Você aprendeu as definições das três funções trigonométricas básicas, $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$, no Capítulo 3. As inversas destas três funções trigonométricas básicas também possuem nomes.

Você sabe através da álgebra que o inverso de um número é encontrado dividindo-se um por este número. Ou seja, o inverso de x é $1/x$, e o inverso de $1/x$ é x .

A seguir, estão as definições das funções trigonométricas inversas:

As Funções Trigonométricas Inversas

$$\text{cosecant}(\theta) = \csc(\theta) = \frac{1}{\text{sen}(\theta)} = \frac{H}{y} \quad (4-1)$$

$$\text{secant}(\theta) = \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{H}{x} \quad (4-2)$$

$$\text{cotangent}(\theta) = \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{x}{y} \quad (4-3)$$

Nestas fórmulas, H é a hipotenusa do triângulo, x é a base e y é a altura (veja Figura 3.1).

As funções trigonométricas inversas não são usadas freqüentemente como sen , $\cos$ e $\tan$, mas elas aparecem de vez em quando. Observe os seguintes pontos importantes destas funções:

1. Todas três podem ser facilmente expressas em termos de $\text{sen}(\theta)$, $\cos(\theta)$ e $\tan(\theta)$. Este é o motivo pelo qual elas não são freqüentemente usadas.
2. Os nomes que o Maple dá a estas funções são os mesmos nomes abreviados nas equações 4-1 a 4-3: $\csc(\theta)$, $\sec(\theta)$ e $\cot(\theta)$.
3. Use sempre notação funcional. Isto significa usar parênteses em torno do ângulo.
4. O intervalo de $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$ é de -1 a 1 , porém $\csc(\theta)$, $\sec(\theta)$ e $\cot(\theta)$ podem ir mais longe, tanto negativamente ($-\infty$), quanto positivamente ($+\infty$). Encontrar o intervalo destas funções será deixado como um exercício. (Veja em Exercícios para Lápis e Papel deste capítulo.)

Gráficos das Funções Trigonômétricas Inversas

Os gráficos das funções trigonométricas inversas mostram que elas são funções de verdade, ou seja, elas passam no teste da linha vertical, o qual estabelece que para qualquer valor dado ao ângulo, uma linha vertical intercepta a curva somente uma vez. As funções trigonométricas básicas, sen, cos e tan, são definidas para todos os ângulos. As funções trigonométricas inversas são indefinidas exatamente nos pontos onde a função trigonométrica básica correspondente é 0.

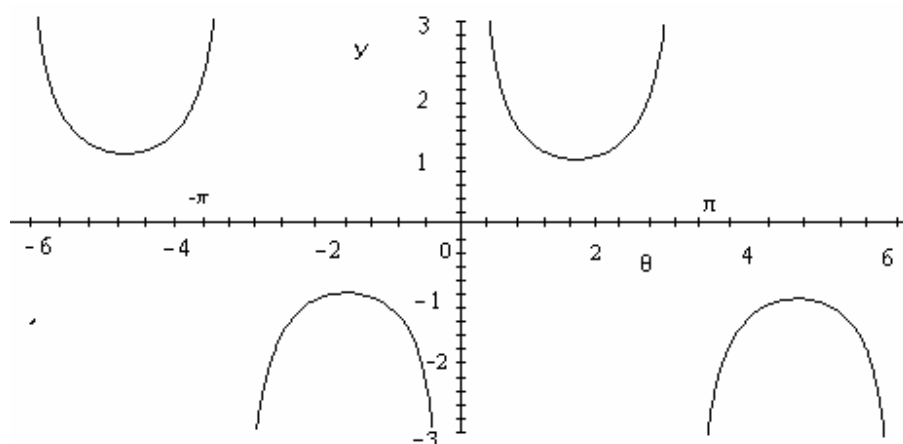


Figura 4.1 A Função Cosecante

Considere a função cosecante. É indefinida nos ângulos $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$. Próximo a estes valores do ângulo, a função cosecante cresce muito, tanto positiva quanto negativamente. O comportamento ligeiramente turbulento dos gráficos de sec e csc é um motivo por que estas funções trigonométricas inversas não são tão comumente usadas quanto as funções trigonométricas básicas sen e cos. Ambas as funções tangente e cotangente se tornam muito amplas em certos ângulos, contudo a função tan é a mais usada das duas (veja Figura 4.1).

A função secante é indefinida em $0, \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \pm7\pi/2, \dots$, enquanto a função cotangente é indefinida nos ângulos $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$, como a função cosecante (veja Figuras 4.2 e 4.3).

Identidades Trigonômicas Fundamentais

Agora que você já viu todas as seis funções trigonométricas básicas, você pode estudar o relacionamento entre elas. Tenha em mente que todas estas funções trigonométricas surgem de razões entre os lados de um triângulo retângulo. Já que o teorema de Pitágoras, $x^2 + y^2 = H^2$ é válido para qualquer triângulo retângulo, você sempre pode encontrar o terceiro lado se você conhece *quaisquer* dois outros. Este resultado permite que você calcule todas as funções trigonométricas se você conhece qualquer uma delas. Especialmente, se você conhece o valor de qualquer uma delas $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ ou $\csc(x)$ e o quadrante no qual ela se encontra, você pode calcular todas as outras. Isto levanta uma questão interessante: por que nós precisamos de seis funções quando uma é suficiente? A resposta é que com seis funções é mais fácil encontrar uma expressão simples para relações em comum.

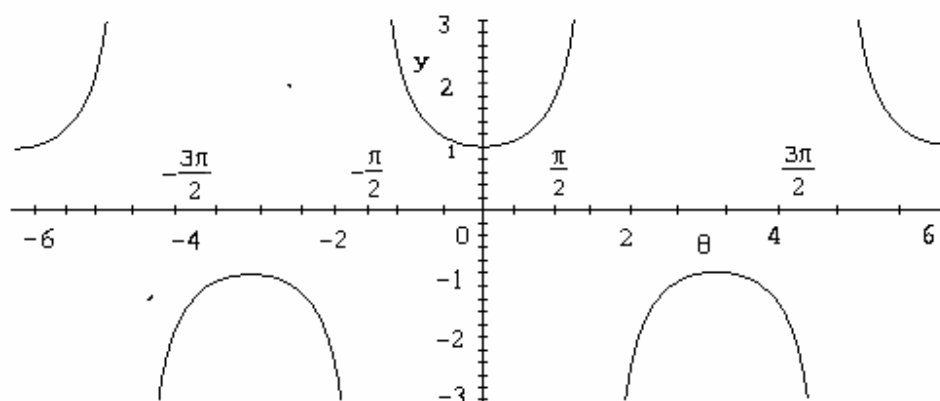


Figura 4.2 A Função Secante

Por exemplo, no estudo da mecânica e da eletrônica, a hipotenusa e o ângulo na base de um triângulo devem ser conhecidas, e expressões para a base e para a altura do triângulo podem ser requeridas.

Se nós temos somente a função seno, a fórmula para a base (usando o teorema de Pitágoras) seria (veja também Figura 4.4):

$$x = H\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$$

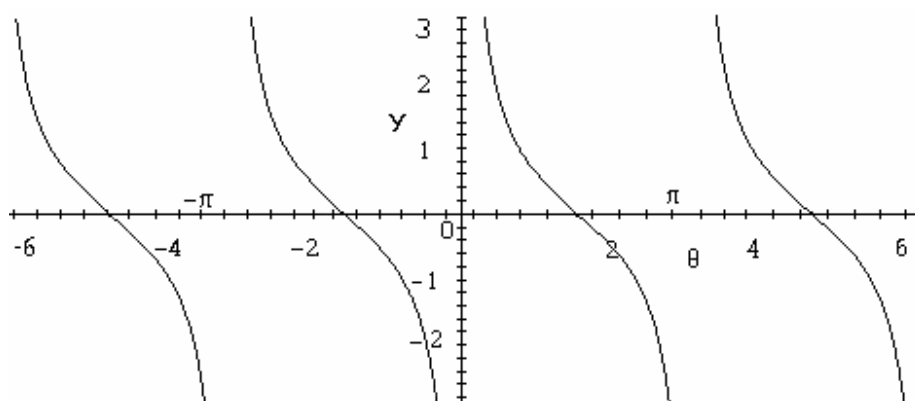


Figura 4.3 A Função Cotangente

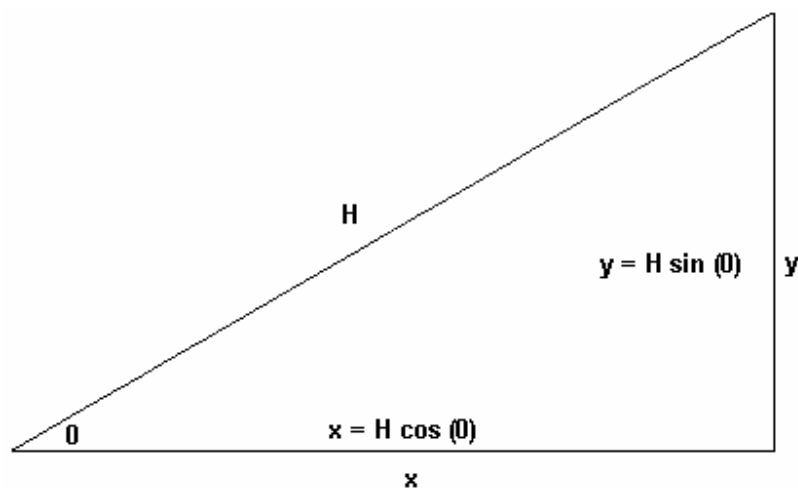


Figura 4.4 Fórmulas para a Base, x , e para a Altura, y , em termos da Hipotenusa, H , e do Ângulo θ

Esta fórmula é mais complexa, pois possui uma raiz quadrada. Você precisaria usar muito mais atalhos para calcular o resultado desta maneira, se você usar uma calculadora ou o Maple. É por esta razão que os matemáticos têm preferido definir seis funções intimamente relacionadas. Isto nos proporciona mais flexibilidade nas expressões matemáticas.

Uma *identidade* é uma equação que permanece verdadeira para *todos* os valores das variáveis que possui. Aqui estão nossas primeiras identidades trigonométricas. Elas seguem imediatamente as definições de $\csc(\theta)$, $\sec(\theta)$ e $\cot(\theta)$.

As Identidades Trigonométricas Fundamentais

$$\sin(\theta)\csc(\theta) = 1, \cos(\theta)\sec(\theta) = 1, \tan(\theta)\cot(\theta) = 1 \quad (4-5)$$

Uma maneira de mostrar que estas relações são verdadeiras é usar o Maple:

```
> sin(x)*csc(x); simplify(sin(x)*csc(x));
sin(x) 1 csc(x)
```

Você viu que foi necessário usar o comando *simplify*. Se você simplesmente multiplicasse o termo $\sin(x)$ pelo termo $\csc(x)$, o Maple lhe daria o mesmo resultado de volta, sem alterações. No entanto, quando você pede ao Maple para *simplificar* a expressão, você obtém o resultado desejado.

Obviamente, você pode chegar a este resultado sozinho, sem o Maple. Porém, terá de usar o Maple para trabalhar com as outras duas identidades só para praticar o método. Você usará a mesma técnica para provar identidades trigonométricas muito mais elaboradas posteriormente.

Provar que uma identidade é verdadeira pode ser difícil se existem muitos termos na expressão, mas provar que uma identidade apresentada é falsa requer somente um exemplo contrário. Se você pode encontrar algum valor que torne os dois lados da equação avaliados como números diferentes, você provou que a equação não é uma identidade. Isto pode ser feito plotando os dois lados da equação no mesmo gráfico. Você verá um exemplo desta técnica na próxima seção.

Exemplo 4-1

Prove que a equação, $1 + \tan(\theta)^2 = \sec(\theta)^2$, como uma identidade.

Observe que nós escrevemos a equação no estilo do Maple. O expoente, 2, é escrito no final da expressão. Por outro lado, você a encontrará escrita desta maneira na maioria dos livros textos: $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$. O significado é o mesmo: primeiro, você avalia a função trigonométrica; depois, você eleva o resultado ao quadrado. Isto é *completamente diferente* de elevar o ângulo ao quadrado primeiro e depois avaliar a função trigonométrica. Certifique-se de que você entendeu

a diferença entre, $\sin(\theta^2)$ e $\sin^2(\theta) = \sin(\theta)^2$. As duas últimas expressões são equivalentes. Para referir-se a elas, nós dizemos, "seno ao quadrado de theta ". Para se referir a $\sin(\theta^2)$, nós dizemos seno de theta ao quadrado". Pegue alguns valores para θ e avalie para ambas as formas usando o Maple ou sua calculadora. Você verá que são diferentes (a menos que você tenha muita sorte e resolva a equação $\sin(\theta^2) = \sin(\theta)^2$ - a solução é $\theta = 0$. Qualquer outro valor de θ entre 0 e 2π apresentará valores diferentes para o lado direito e para o lado esquerdo da equação).

Agora, volte ao problema original. Você pode resolver o problema referindo-se ao triângulo definido (veja Figura 4.5).

Passo1: Escreva a equação que você está tentando provar como uma identidade (Equação 4-6).

$$1 + \tan(\theta)^2 = \sec(\theta)^2 \quad (4-6)$$

Passo 2. Use a definição das funções trigonométricas para expressá-las em termos de H , x e y (Equação 4-7).

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \quad (4-7)$$

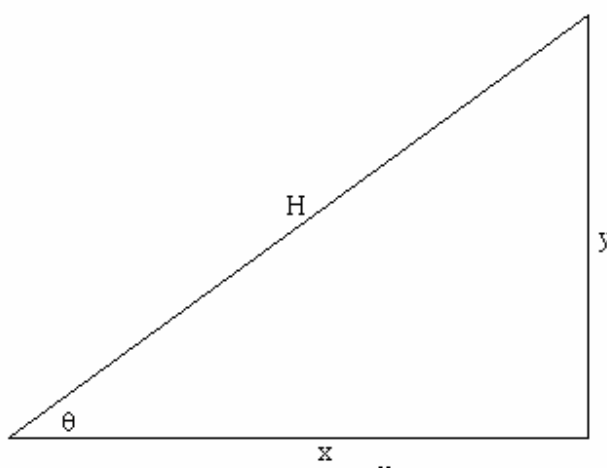


Figura 4.5 Use o Triângulo Básico para Ajudar a Provar Identidades

Passo 3. Escolha um lado da equação e trabalhe com ele. Neste caso, foi escolhido o lado esquerdo (Equação 4-8).

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{H^2}{x^2} \quad (4-8)$$

Passo 4. Usando a álgebra, simplifique a expressão.

$$\frac{H^2}{x^2} = \sec(\theta)^2$$

Passo 5. Mais uma vez usando definições trigonométricas, expresse o resultado simplificado em termos de uma função trigonométrica.

Exemplo 4-2

Prove que $1 + \cot(\theta)^2 = \csc(\theta)^2$

Desta vez nós usaremos o Maple. A técnica é subtrair o lado direito da equação do lado esquerdo. Se a equação é uma identidade, o resultado da subtração será 0.

Passo1: forme a seguinte frase no Maple:

> 1 + cot(theta)^2 - csc(theta)^2;

$$1 + \cot(\theta)^2 - \csc(\theta)^2$$

Passo 2: simplifique o resultado.

> simplify(1 + cot(theta)^2 - csc(theta)^2);

0

A subtração resultou 0, então $1 + \cot(\theta)^2 = \csc(\theta)^2$ é uma identidade.

Sua Vez:

(a) Prove que $1 - \csc(\theta)^2 = -\cot(\theta)^2$ é uma identidade.

Resposta: _____

(b) Prove que $\sin(\theta)^3 = \sin(\theta) - \cos(\theta)^2 \sin(\theta)$ pode ser uma identidade construindo o gráfico dos dois lados da equação.

Resposta: _____

Exemplo 4-3

Prove que $50 \frac{\cos(x) \csc(x)}{\cot(x)^2} = 49 \tan(x) + 1$ não é uma identidade.

Para demonstrar que uma equação não é uma identidade, tudo que você deve fazer é mostrar que o lado direito *não* é igual ao lado esquerdo para algum valor (ou valores) de x . Isto pode ser realizado, plotando ambos os lados da equação. Simplesmente, faça a mesma escolha para o intervalo de x , como $x = -\pi/2 \dots \pi/2$. Você supõe valores para o intervalo de y , como $-50 \dots 50$. Se o intervalo que você escolheu na primeira vez não lhe oferecer uma boa visualização do gráfico, faça outra escolha. O Maple faz o trabalho pesado plotando os pontos e produzindo o gráfico.

Passo1. Plote o lado direito e o lado esquerdo da equação em um mesmo gráfico (veja Figura 4.6).

> plot({50*cos(x)*csc(x)/cot(x)^2, 49*tan(x)+1}, x = -Pi/2 .. Pi/2, -50 .. 50);

Passo 2. Observe o gráfico cuidadosamente. Se você vir duas linhas, as curvas para os dois lados da equação são diferentes. Duas curvas são visíveis neste gráfico. Se você vê duas linhas, as curvas dos dois lados da equação são diferentes. Duas curvas são visíveis neste gráfico, então a equação não pode ser uma identidade.

Passo 3. Para ter certeza do seu resultado, você pode ampliar uma parte do seu gráfico.

```
> plot( {50*cos(x)*csc(x)/cot(x)^2, 49*tan(x)+1}, x = --0.56 .. -0.54);
```

Aqui, nós ampliamos o gráfico, plotando um pequeno intervalo dos valores em torno de $x = -0.55$.

Tente plotar você mesmo. O resultado é: duas linhas quase retas, claramente separadas.

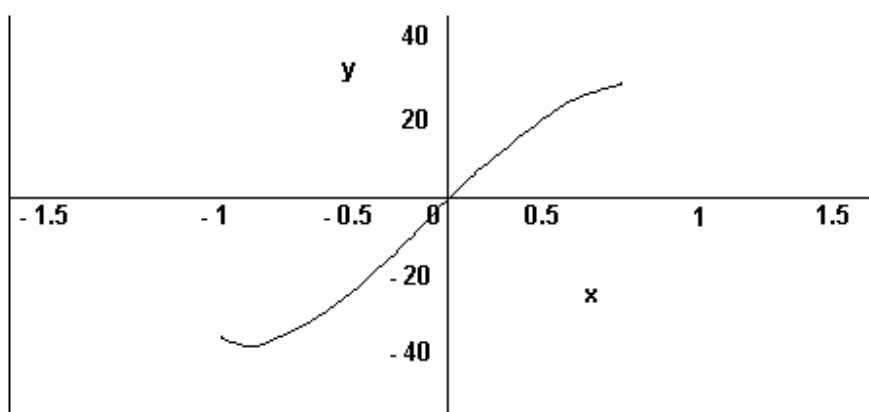


Figura 4.6 Gráfico de $50 \frac{\cos(x) \csc(x)}{\cot(x)^2} = 49 \tan(x) + 1$, mostrando que as duas curvas são diferentes

Sua Vez: Prove que $\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}} \operatorname{sen}(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ não é uma identidade.

Resposta: _____

Exemplo 4-4

Prove que $\tan(y) \csc(y) = -\sec(y)$ não é uma identidade.

Já que nós dissemos que é necessário somente um valor de y onde o lado direito não é igual ao lado esquerdo para desaproveitar a identidade, nós podemos pegar um ponto ao acaso e ver se os dois lados da equação são iguais. Faça $y = 1$, então:

```
> evalf(tan(1)*csc(1)); evalf(-sec(1));
```

$$1.850815718$$

$$-1.850815718$$

Nós vemos que quando $y = 1$, o lado direito é o negativo do lado esquerdo. Isto deveria nos levar a suspeitar que houve um erro tipográfico e que $\tan(y)\csc(y) = \sec(y)$ provavelmente é uma identidade. Isto é facilmente provado usando o Maple:

```
> simplify(tan(y)*csc(y)-sec(y));
```

$$0$$

Resumo:

1. Use o triângulo básico (Figura 4.5) para expressar funções trigonométricas em termos de H , x , e y se você deseja simplificar uma expressão contendo mais de uma função trigonométrica.

2. Plote os lados direito e esquerdo de uma equação trigonométrica. O gráfico o levará à solução, a qual pode ser uma identidade.

3. Para confirmar que alguma equação trigonométrica é de fato uma identidade, use o Maple. Subtraia o lado direito do lado esquerdo e simplifique o resultado. Se for 0, você possui uma identidade. Nota: O Maple não pode reduzir cada expressão a 0. Ele pode precisar de alguma ajuda!

SuaVez. Prove que $\cot(\theta)\sec(\theta) - \tan(\theta)\cos(\theta) = -\cos(\theta)\cot(\theta)$ não é uma identidade.

Resposta: _____

Exemplo 4-5

Resolva graficamente a equação trigonométrica $\csc(x) = \cot(x) + 2$. Equações trigonométricas são mais complicadas do que as equações lineares ou quadráticas. Mesmo se você precisa de uma solução analítica (exata), será útil ter uma figura da situação fazendo um gráfico do

problema. Uma aproximação organizada é requerida devido à complexibilidade destes tipos de problemas. Aqui estão os passos a serem seguidos:

1. Escreva a equação no Maple, dando a ela um nome. Você irá se referir a esta equação ou a partes dela novamente; então você deve estar apto a identificá-la pelo nome.
2. Plote ambos os lados da equação em um único gráfico e veja onde as duas curvas se cruzam. Estes pontos são as soluções para a equação dada. É claro, você deve escolher um intervalo para o gráfico. Uma boa sugestão para o intervalo horizontal é $-\pi .. \pi$. Já que as funções trigonométricas inversas tendem ao infinito, você provavelmente precisará especificar um intervalo vertical também. Provavelmente, você precisará redefinir os intervalos depois de observar a primeira tentativa.
3. Ajuste o intervalo do gráfico até que o ponto de interseção das duas curvas esteja próximo do centro da janela.
4. Na janela do gráfico, posicione o ponteiro do gráfico no ponto de interseção e clique com o botão esquerdo do mouse. As coordenadas x,y do ponto estão exibidas na parte inferior esquerda da janela.
5. Se você deseja mais precisão, estreite o intervalo horizontal em volta do ponto de interseção.
6. Use o comando *solve* do Maple na equação original para recorrer a uma solução analítica. O Maple pode não estar apto a encontrar uma. Se não puder, você obterá outro prompt (>), mas não receberá uma mensagem informando que uma solução não pode ser encontrada. Tenha cuidado! Equações trigonométricas podem ter muitas soluções, e o Maple tipicamente encontra somente uma. Por isso, fazer o gráfico do problema é tão importante. Nota: se o Maple apresentar uma solução com a letra I contida, o Maple encontrou uma solução no domínio dos números complexos (no Maple, $I = \sqrt{-1}$). Soluções deste tipo deveriam ser descartadas, já que temos em vista soluções *reais*. Números complexos são discutidos no Capítulo 8, Maple para Álgebra.

Solução. (Veja também Figura 4.7).

Passo 1:

```
> eq1 := csc(x) = cot(x) + 2;
```

```
eq1 := csc(x) = cot(x) + 2
```

Passo2:

```
> plot( { rhs(eq1), lhs(eq1) }, x = -Pi .. Pi, -5 .. 5);
```

Passo 3: você pode ajustar os parâmetros do intervalo, se você desejar. Você pode ver que $x = 2.1 \dots 2.3$ deve ser uma boa escolha. Não será necessário especificar o intervalo vertical desta vez, por quê? Tente fazer o gráfico com o novo intervalo horizontal com e sem especificar o intervalo vertical para ver a diferença.

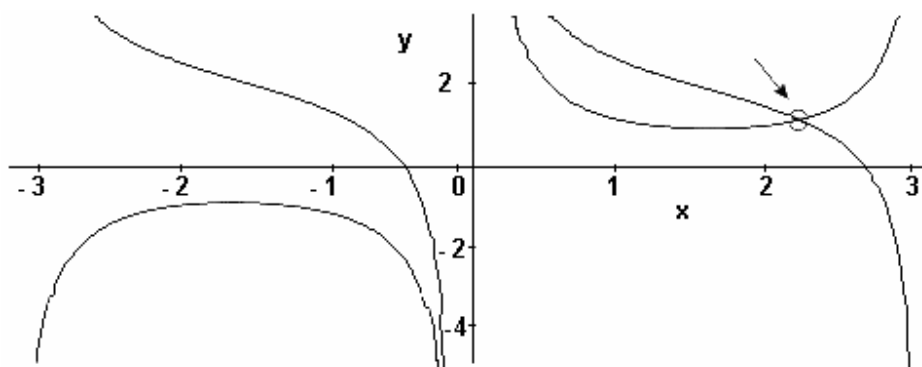


Figura 4.7 Solução Gráfica de $\csc(x) = \cot(x) + 2$

Passo 4: a solução aproximada $x = 2.2$, $y = 1.3$ pode ser lida na parte inferior esquerda da janela gráfica depois de clicar no ponto de interseção. *Esta é a solução para o problema.* Deve estar aproximada, mas, se você quiser pode aumentar a precisão estreitando o intervalo do gráfico.

Passo 5: se nós estreitarmos o intervalo do gráfico para $x = 2.2 \dots 2.3$, agora encontramos $x = 2.214$, $y = 1.251$. Nesta ampliação, os gráficos parecem ser a interseção de duas linhas retas. Nós poderíamos continuar aproximando o ponto de interseção, se necessário, para obter mais precisão ainda.

Passo 6: use o comando *solve* do Maple:

> solve(eq1, x):

Devido ao fato de ter dado um nome à equação, este passo se torna muito fácil. É claro, nós podemos obter ou não a solução, mas não custa tentar! O Maple encontra a solução neste caso. É $x = 2 \arctan(2)$, que pode ser avaliada para 2.214 297436. Os quatro primeiro dígitos encontrados pelo método do gráfico estavam corretos. Como você encontraria a altura, y , do ponto de interseção? Você substituiria $x = 2 \arctan(2)$ em $\csc(x)$ ou $\cot(x) + 2$. O Maple dá o resultado como 1.250. Este resultado é exato, mas nós precisaremos de algumas identidades trigonométricas adicionais no Capítulo 10 para provar isto.

Sua Vez. Resolva a equação $\frac{1}{2}[(\tan(x) + \cot(x))\sin(x)\cos(x)] = \cos(x)$ no intervalo $0 \leq x < \pi/2$ através do gráfico.

Resposta: _____

Lápis e Papel

LP - 1

Se $\sec(\theta) = 2\sqrt{2}$ encontre a $\cot(\theta)$. Resolva o problema exatamente encontrando as medidas do triângulo na Figura 4.5. Depois encontre uma aproximação decimal para a solução exata.

Respostas: Aproximação decimal: _____ Solução exata: _____

LP - 2

Encontre todas as seis funções trigonométricas para o ângulo θ , dados os triângulos na Figura 4.8.

- (a) $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

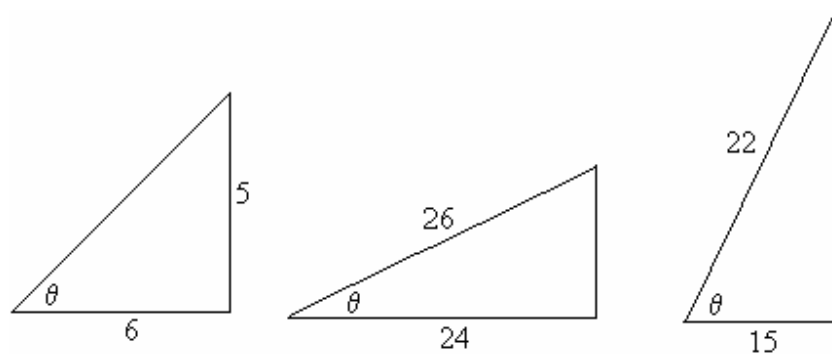


Figura 4.8 Diagrama para o Problema PP4-2

- (b) $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

(c) $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

LP - 3

Encontre todas as seis funções trigonométricas para o ângulo θ , dadas as medidas dos dois lados do triângulo ABC (veja Figura 4.9).

(a) $AB = 42$ $BC = 40$ $AC =$ _____
Respostas: $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

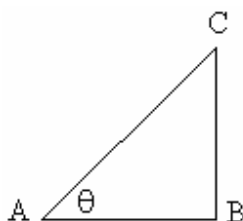


Figura 4.9 Diagrama para o Problema LP 4-3

(b) $AB = 56$ $BC = 33$ $AC =$ _____
Respostas: $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

(c) $AB =$ _____ $BC = 24$ $AC = 74$
Respostas: $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

(d) $AB = 154$ $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ $AC = 170$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

(e) $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ $BC = 48$ $AC = 290$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

LP - 4

Preencha os valores que estão faltando. Todos os ângulos estão no primeiro quadrante.

(a) $\sin(\theta) = 1/2$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

(b) $\cos(\theta) = 1/\sqrt{2}$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

(c) $\tan(\theta) = 5/3$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

(d) $\cot(\theta) = 1.6$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

(e) $\sec(\theta) = 1.5$
Respostas: $\sin(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cos(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\tan(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$
 $\csc(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\sec(\theta) \underline{\hspace{2cm}},$ $\cot(\theta) \underline{\hspace{2cm}}$

(f) $\csc(\theta) = 4$

Respostas: $\sin(\theta)$ _____, $\cos(\theta)$ _____, $\tan(\theta)$ _____
 $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

LP - 5

Se $\theta = 30^\circ$, calcule:

(a) $\sin(\theta) \csc(\theta)$

Resposta: _____

(b) $\tan(\theta) \cot(\theta)$

Resposta: _____

(c) $\cos(\theta)/\sin(\theta) - \cot(\theta)$

Resposta: _____

(d) A resposta depende do ângulo?

Resposta: _____

LP - 6

Calcule, para qualquer:

(a) $\csc(-x) + \csc(x)$

Resposta: _____

(b) $\sec(-x) - \sec(x)$

Resposta: _____

(c) $\cot(x) + \cot(-x)$

Resposta: _____

LP - 7

Responda às perguntas sobre a função cosecante:

(a) O domínio é

Resposta: _____

(b) A imagem é

Resposta: _____

(c) A função possui zeros?

Resposta: _____

LP - 8

Responda às perguntas sobre a função secante:

(a) O domínio é

Resposta: _____

(b) A imagem é

Resposta: _____

(c) A função possui zeros?

Resposta: _____

LP - 9

Responda às perguntas sobre a função cotangente:

(a) O domínio é

Resposta: _____

(b) A imagem é

Resposta: _____

(c) A função possui zeros?

Resposta: _____

LP - 10

Dados os triângulos (a), (b) e (c) na Figura 4.10, encontre os valores das funções trigonométricas inversas para cada um deles.

- (a) $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____
 (b) $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____
 (c) $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____

LP - 11

Complete os valores que estão faltando

- (a) $\csc(\theta)$ 5, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ _____
 (b) $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ 2, $\cot(\theta)$ _____
 (c) $\csc(\theta)$ _____, $\sec(\theta)$ _____, $\cot(\theta)$ 1/3

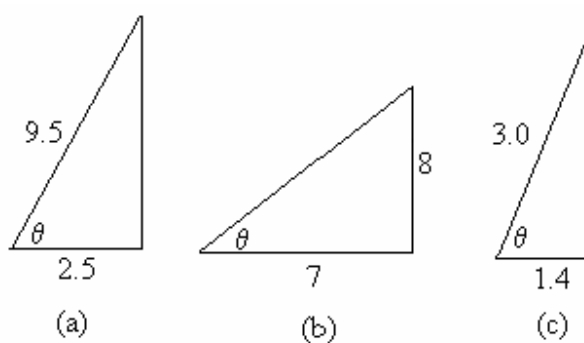


Figura 4.10 Diagrama para LP4-10

Laboratório Maple

LM - 1

Um modo de “provar” que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ é plotando o lado esquerdo desta equação em um círculo. Se o gráfico é uma linha reta horizontal na altura igual a 1, então a função é uma constante.

```
>plot( sin(theta)^2 + cos(theta)^2, theta = 0 .. 2*Pi);
```

Descreva o gráfico:

Resposta: _____

LM - 2

Estenda o intervalo do gráfico do ML4-1 para $\theta = -2\pi .. 2\pi$. Descreva o resultado:

Resposta: _____

LM - 3

Plote $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ no intervalo $\theta = -2\pi .. 2\pi$. Este gráfico é de uma função constante? Se não, descreva suas maiores características como o ponto máximo, ponto mínimo e localização dos zeros da função.

Resposta: Máximo em _____

Resposta: Mínimo em _____

Resposta: Zeros em _____

LM - 4

Prove que $2\sin^2(x) - 3\sin^2(x) - 1 = \cos^2(x) (1 - 2\sin^2(x))$ não é uma identidade. Plote cada lado da equação. Se os gráficos forem diferentes em um ponto somente, a equação não pode ser uma identidade.

> ; (Escreva o comando *plot* aqui) _____

A equação é uma identidade ?

Resposta: _____

LM - 5

Outro método para mostrar que uma equação não é uma identidade é avaliar cada lado para alguns valores aleatórios (ou selecionados, se você desejar) das variáveis. Avalie a equação no LM4-4 para alguns valores de x no intervalo $0 \dots 2\pi$. Alguns valores de x podem satisfazer a equação. Estas são as *soluções* para a equação no intervalo especificado. Será necessário um valor de x que torne os dois lados diferentes para provar que a equação não é uma igualdade. Encontre um destes valores para x . Apresente o valor de x e os valores diferentes do lado esquerdo (lhs) e do lado direito (rhs) da equação.

> ; (Escreva o comando *plot* aqui) _____

Resposta: valor de $x =$ _____, lhs = _____, rhs = _____.

LM - 6

Você aprendeu que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ é uma identidade. Justifique este fato computando o lado esquerdo da equação para vários valores de θ . Introduza os seguintes comandos:

> e46 := evalf(sin(theta)^2 + cos(theta)^2); (Observe a diferença no modo como você escreveu $\sin^2(\theta)$ no Maple)

$e46 := \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2$

> evalf(subs(theta = 0, e46));

Edite a última linha, estabelecendo $\theta = 0.1, 0.2, 0.4, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Verifique que o resultado é 1 cada vez.

Todos os valores são *exatamente* 1? Considere qualquer diferença.

Resposta : _____

LM - 7

Mostre que $\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)$ não é uma identidade repetindo LM4-6 com o sinal + substituído por um sinal - . Edite *e46* deste modo e relate um destes valores de θ para provar seu exemplo.

Resposta: $\theta =$ _____, $\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) =$ _____

LM - 8

O Maple trabalha com medidas em radianos. Sua calculadora científica contém uma opção que permite a você trabalhar em radianos ou graus. Existem vantagens e desvantagens nesta aproximação. Muitos deslizes são cometidos porque as pessoas esquecem de com que modo estão trabalhando. O Maple sempre trabalha com radianos. O único deslize que você pode cometer é esquecer este fato. Agora que você já tem certeza de que o Maple fechou a porta para um das possíveis maneiras de cometer um erro, nós reabriremos a porta! Você pode ensinar ao Maple usar graus tão bem como radianos. Você já viu um método, onde os nomes especiais *deg_* e *rad_* foram definidos. O método empregado a este problema é definir um novo conjunto de funções. Nós distinguimos estas novas funções das funções anteriores deixando a primeira letra maiúscula. Lembre-se de que o Maple é “sensível”, o que significa que ele trata letras maiúsculas completamente diferente de letras minúsculas. Por exemplo, o Maple considera os dois nomes, *Cos* e *cos*, completamente diferente. Você pode encontrar uma explicação mais completa das funções do Maple em *Maple para Álgebra*, Capítulo 2, nestas séries.

Defina uma nova função:

> Sin := x -> sin(Pi*x/180);

$$Sin := x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{80}\pi x\right)$$

Se você não viu esta maneira de definir uma *função* antes, aceite-a por enquanto. Você irá estudar estas funções gradualmente para mostrar como elas funcionam.

(a) Defina Cos, Tan, Sec, Csc, e Cot

> ; (Escreva as definições do Maple aqui)

Respostas:

Cos: > _____

Tan: > _____

Sec: > _____

Csc: > _____

Cot: > _____

(b) Digite a definição em uma nova área de trabalho do Maple. Salve-a como *tdeg.ms* (Maple V3) ou *tdeg.mws* (Maple V4). Toda vez que você quiser trabalhar com trigonometria e avaliar ângulos de funções trigonométricas em graus, abra este documento e reexecute os comandos que definem Sin, Cos e assim em diante. Continue com qualquer outro trabalho que você precise fazer, trabalhando com graus se necessário. Salve sua área de trabalho completa com a opção *Save As...* do menu *File*. Deste modo, seu arquivo original, *tdeg.ms* (ou *tdeg.mws*), permanecerá inalterado. Um bônus extra será que os comandos “grau” estarão incluídos em toda área de trabalho que você criar desta maneira.

Defina os comandos do LM4-8 e salve-os em um arquivo. Abra este arquivo no Maple, desça à área de trabalho e insira o comando:

> **Sin(45);**

Qual é o resultado? Explique o que aconteceu.

Respostas: Resultado: _____

Explicação: _____

(c) Você pode abrir o arquivo *tdeg.ms* (Maple V3) ou *tdeg.mws* (Maple V4) e copiar toda a área de trabalho. A seguir, abra outro documento e cole os comandos do *tdeg.mws*. Esta é uma maneira de incorporar estes comandos a uma área de trabalho existente.

Você deverá reexecutar estes comandos antes de trabalhar com eles?

Resposta: _____

LM - 9

Use os comandos que você definiu no LM4-9 para calcular as seguintes funções. Verifique suas respostas com uma calculadora.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (a) $\sin(30)$ _____ | (k) $\sin(150)$ _____ |
| (b) $\cos(150)$ _____ | (l) $\cos(510)$ _____ |
| (c) $\tan(45)$ _____ | (m) $\tan(135)$ _____ |
| (d) $\tan(90)$ _____ | (n) $\tan(180)$ _____ |
| (e) $\sin(60)$ _____ | (o) $\sin(120)$ _____ |
| (f) $\sec(45)$ _____ | (p) $\csc(135)$ _____ |
| (g) $\sec(450)$ _____ | (q) $\sec(135)$ _____ |
| (h) $\sin(45)$ _____ | (r) $\sin(135)$ _____ |
| (i) $\cos(45)$ _____ | (s) $\cos(135)$ _____ |
| (j) $\cos(60)$ _____ | (t) $\cos(120)$ _____ |

LM - 10

Plote $1 + \cot(x)^2$ e $\csc(x)^2$ no mesmo gráfico. O que a análise do gráfico diz para você?

> ; (Escreva o comando do Maple aqui)_____

Respostas: Intervalo escolhido: _____

O gráfico mostra: _____

LM - 11

(a) Qual o comando do Maple que calcula (em decimal) a cotangente de 57.3° ?

Resposta: _____

(b) Qual o comando do Maple que calcula (em decimal) a cotangente de 1 radiano?

Resposta: _____

LM - 12

(a) Qual é o resultado desse comando?

> csc(Pi);

Resposta: _____

(b) Tente calcular $\csc(\pi)$ na calculadora.

Resposta: _____

(c) Referente a figura 4.1, explique o problema:

Resposta: _____

LM - 13

(a) $\csc x$;

Resposta: _____

(b) $4 \cot(x)$;

Resposta: _____

(c) $2 \sec(x)$;

Resposta: _____

LM - 14

Qual o comando do Maple para plotar a função do quadrado da cotangente no intervalo -1 a +1 radiano?

>; (Escreva o comando do Maple aqui)_____

LM - 15

Por que é melhor usar nossa nova função, `Csc`, quando nós queremos fazer o gráfico da função da cossecante em termos de grau ao invés de radiano? Depois de tudo, você poderia inserir o comando:

```
> plot( csc( Pi/180*x), x=0 ..Pi);
```

Resposta: _____

FIGURA:

Figura 4.11 Gráfico da função cossecante sem informação útil (Diagrama para LM4-16)

LM - 16

Você pode conseguir muita informação fazendo o gráfico de uma função. Para conseguir o máximo através do seu gráfico, você precisa escolher a escala horizontal e vertical que mostra as características da função o mais claro possível. Observe o que pode dar errado se você inserir o seguinte comando:

```
>plot( csc(x), x=-2*Pi..2*Pi)
```

Veja figura 4.11. O que aconteceu é que a função cossecante tendeu de $\pm \infty$ em $x = \pi$ e $x = -\pi$. Quando o Maple tenta plotar a função, ele encontra alguns números, positivos e negativos, muito grandes; então, ele traça o gráfico de acordo. Infelizmente, isso resulta em um gráfico quase ilegível. O gráfico exibido na Figura 4.11 foi produzido dando ao Maple tanto um intervalo horizontal quanto um intervalo vertical:

```
>plot(csc(x), x=-2*Pi.. 2*Pi, -Pi.. Pi, discontinuous = true, title = `Função Cossecante`):
```

Observe dois detalhes a mais sobre esse comando plot. O uso de *discont = true* evita que o Maple "junte os pontos" à medida que a função possui saltos próximos aos valores $x = \pi$ e $x = -\pi$. Você pode nomear o gráfico usando *title = `Função Cossecante`*. Observe que você envolve o texto em aspas especiais, chamadas backquotes. Como de costume, essas diferentes partes do comando plot são separadas pelas vírgulas. Tente inserir esse comando sem digitar *discont = true* e veja a diferença. Além disso, experimente nomear seus gráficos, o que dará um toque profissional.

1. Responda às seguintes questões referentes ao gráfico da função cossecante mostradas na figura 4.1.

(a) Qual é o *domínio* da função cossecante? (Lembre-se: lugares onde a função não é definida não podem fazer parte do domínio!)

Resposta: _____

(b) Qual é o *imagem* da função cossecante? (Tenha cuidado: por exemplo, o valor 0 está incluído no intervalo?)

Resposta: _____

(c) Qual é o *período* da função? (O período é a menor distância horizontal sobre a qual ela se repete.)

Resposta: _____

(d) Determine os *zeros* da função, os valores de x onde $y = 0$ em $y = \csc(x)$.

Resposta: _____

(e) A função é simétrica? Ela é par ou ímpar? Se a função for par, então $\csc(-x) = \csc(x)$; se for ímpar, $\csc(-x) = -\csc(x)$. Dica: faça o gráfico $\csc(x)$ e $\csc(-x)$ na mesma janela de gráfico. Você pode determinar a simetria da função analisando o resultado do gráfico.

Resposta: _____

2. Responda às seguintes questões referentes ao gráfico da função secante mostrada na Figura 4.2.

(a) Qual é o *Domínio* da função secante? (Lembre-se: lugares onde a função não é *definida* não podem fazer parte do domínio!)

Resposta: _____

(b) Qual é a *imagem* da função secante? (Cuidado: por exemplo, o valor 0 está incluído no intervalo?)

Resposta: _____

(c) Qual é o período da função? (O período é a menor distância horizontal sobre a qual uma função se repete.)

Resposta: _____

(d) Determine os *zeros* da função, os valores de x onde $y = \sec(x)$.

Resposta: _____

(e) A função é simétrica? Ela é par ou ímpar? Se a função for par, então $\csc(-x) = \csc(x)$; se for ímpar, $\sec(-x) = -\sec(x)$. Dica: Faça o gráfico $\sec(x)$ e $\sec(-x)$ na mesma janela de gráfico. Você pode determinar a simetria da função analisando o resultado do gráfico.

Resposta: _____

3. Responda às seguintes questões referentes aos gráficos da função cotangente mostrado na Figura 4.3.

- (a) Qual é o *Domínio* da função cotangente? (Lembre-se: lugares onde a função não é *definida* não podem fazer parte do domínio!)

Resposta: _____

- (b) Qual é a *imagem* da função cotangente? (Cuidado: por exemplo, o valor 0 está incluído no intervalo?)

Resposta: _____

- (c) Qual é o período da função? (O período é a menor distância horizontal sobre a qual uma função se repete.)

Resposta: _____

- (d) Determine os *zeros* da função, os valores de x onde $y = \cot(x)$.

Resposta: _____

- (e) A função é simétrica? Ela é par ou ímpar? Se a função for par, então $\csc(-x) = \csc(x)$; se for ímpar, $\cot(-x) = -\cot(x)$. Dica: Faça o gráfico $\cot(x)$ e $\cot(-x)$ na mesma janela de gráfico. Você pode determinar a simetria da função analisando o resultado do gráfico.

Resposta: _____

4. Em qual quadrante estão as funções positivas $\csc(x)$, $\sec(x)$, $\cot(x)$?

Respostas:

$\csc(x)$ _____

$\sec(x)$ _____

$\cot(x)$ _____

5. A função $y = \csc(x)$ tem um mínimo para valores de x entre 0 e π ? Determine mais precisamente se $y = \csc(x)$ tem um mínimo para valores de x para $0 < x < \pi$?

Resposta: _____

6. A função $y = \sec(x)$ tem um mínimo para $0 < x < \pi$?

Resposta: _____

7. A equação $\sin(x) = \csc(x)$ possui soluções? Se possui, quais?

Resposta: _____

Explorações

E4-1

- (a) Você já notou que as funções trigonométricas são fortemente interrelacionadas. Use as identidades Pitagoreanas

$$\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$$

$$\sec(\theta)^2 = 1 + \tan(\theta)^2$$

$$\csc(\theta)^2 = 1 + \cot(\theta)^2$$

Para expressar $\cos(\theta)$, $\tan(\theta)$, $\cot(\theta)$ e $\sec(\theta)$ em termos de $\sin(\theta)$.

(b) Expresse cada uma das cinco funções trigonométricas restantes em termos de $\tan(\theta)$.

E4-2

Na análise de um problema trigonométrico, fórmulas podem ser derivadas de modo que não estejam necessariamente na sua forma mais simples. Simplifique as fórmulas a seguir.

a) $\tan(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$

b) $\cot(\theta) + \frac{\sec(\theta)}{1 + \csc(\theta)}$

E4-3

Verifique as seguintes identidades.

(a) $\frac{1 - \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\cos(\theta)}{1 + \sin(\theta)}$

(b) $\frac{\cos(\theta) \cot(\theta) - \sin(\theta) \tan(\theta)}{\csc(\theta) + \cos(\theta)} = 1 + \sin(\theta) \cos(\theta)$

E4-4

(a) Expresse $\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$ em termos de $\sec(\theta)$ e $\csc(\theta)$.

- (b) Expresse em termos de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$.
- $$\frac{\sec(\theta) + \csc(\theta)}{\tan(\theta) + \cot(\theta)}$$

E4-5

Simplifique $(\tan(a) + \tan(b)) (1 - \cot(a) \cot(b)) + (1 - \tan(a) \tan(b)) (\cot(a) + \cot(b))$